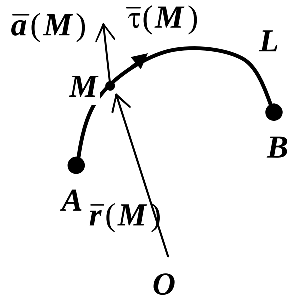
17.4. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля.



17.4.1. Определение линейного интеграла. Пусть в пространственной области $\boldsymbol{V}$ определено непрерывное векторное поле $\bar{a}\,(M)$, L - гладкая кривая, расположенная в $\boldsymbol{V}$. Линейным интегралом поля $\bar{a}$ вдоль линии L называется криволинейный интеграл по длине дуги от скалярного произведения $\bar{a}\,(M)$ на единичный касательный вектор $\bar{\tau}\,(M)$: $W = \int\limits_L \bar{a}(M)\cdot\bar{\tau}(M)\,ds$.

Как и поток, этот интеграл может представляться различным образом. Так, если учесть, что произведение $\bar{\tau}(M)$ на ds даёт изменение радиуса-вектора точки M, т.е. $\bar{\tau}\cdot ds = d\bar{r} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$,то $W = \int\limits_L \bar{a}(M)d\bar{r}$ и $W = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$. Следовательно, линейный интеграл может быть выражен и через линейный интеграл по координатам.

Физический смысл линейного интеграла: если $\bar{a}\,(M)$ - силовое поле, то W равен работе этого поля при перемещении материальной точки вдоль линии L (см. раздел **16.3**).

17.4.2. Основные свойства линейного интеграла.

17.4.2.1. Линейность. $\int\limits_L \left(C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2\right)\bar{\tau}\,ds = C_1\int\limits_L \bar{a}_1\bar{\tau}\,ds + C_2\int\limits_L \bar{a}_2\bar{\tau}\,ds$;

17.4.2.2. Аддитивность. $\int\limits_{L_1\cup L_2} \bar{a}\cdot\bar{\tau}\,ds = \int\limits_{L_1} \bar{a}\cdot\bar{\tau}\,ds + \int\limits_{L_2} \bar{a}\cdot\bar{\tau}\,ds$. Направление на каждой из частей L_1 и L_2 должно быть таким же, как и на всей кривой $L_1 \cup L_2$;

17.4.2.3. При изменении направления вдоль L линейный интеграл меняет знак. Это следует из того, что вектор $\bar{\tau}\,(M)$ меняется на $-\bar{\tau}\,(M)$.

17.4.2.4. Если L - векторная линия поля, и движение происходит в направлении поля, то $W>0$. В этом случае вектор $\bar{\tau}\,(M)$ коллинеарен $\bar{a}\,(M)$, поэтому $\bar{a}\cdot\bar{\tau} = \text{пр}_{\bar{\tau}}\bar{a} = |\bar{a}| > 0$.

17.4.3. Вычисление линейного интеграла. Как и любой криволинейный интеграл, линейный интеграл вычисляется сведением к определённому интегралу по параметру на кривой; обычно вычисляют криволинейный интеграл $W = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$. Если кривая при параметрическом задании имеет вид $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_0 \le t \le t_k \\ z = z(t); \end{cases}$, где $x(t),\, y(t),\, z(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то $W = \int\limits_L P(x,y,z)\cdot dx + Q(x,y,z)\cdot dt + R(x,y,z)\cdot dz =$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_k}\left[P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)\right]dt.$$

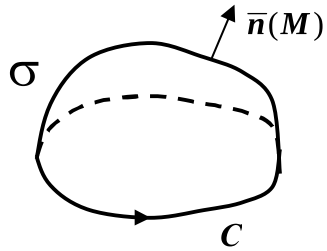
Направление интегрирования определяется направлением движения по кривой.

17.4.4. Циркуляция векторного поля. Циркуляцией называется линейный интеграл векторного поля по замкнутой кривой C: $\text{Ц} = \oint\limits_C \bar{a}\cdot d\bar{r}$.

Обычно говорят, что циркуляция характеризует вращательную способность поля. Имеется в виду следующее. Если векторные линии поля замкнуты, то, как мы видели, циркуляция по ним в направлении поля положительна, при этом в гидродинамической интерпретации частицы жидкости крутятся по этим замкнутым линиям. Пусть теперь линии тока произвольны; вообразим в объёме $\boldsymbol{V}$ замкнутый контур C. Если в результате движения жидкости этот контур будет вращаться, то поле обладает вращательной способностью; абсолютная величина циркуляции будет определять угловую скорость вращения (чем больше $|\text{Ц}|$, тем выше скорость); знак циркуляции покажет, совпадает ли направление вращения с направлением интегрирования.

17.4.5. Теорема Стокса. Пусть в пространственной области $\boldsymbol{V}$ задано гладкое векторное поле

$\overline{a}\,(M)$ и σ - незамкнутая кусочно-гладкая поверхность, ограниченная контуром C. Единичный вектор нормали $\overline{n}(M)$ выбирается так, что с его конца направление обхода C видно совершающимся против часовой стрелки. Тогда циркуляция поля $\overline{a}$ по контуру C равна потоку ротора этого поля через поверхность σ: $\oint\limits_C \overline{a}\cdot d\overline{r} = \iint\limits_\sigma \mathrm{rot}\,\overline{a}\cdot\overline{n}\,d\sigma$.



Приведённую формулу называют формулой Стокса в векторной форме. В координатной форме формула Стокса имеет вид

$$\oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy \text{ или}$$

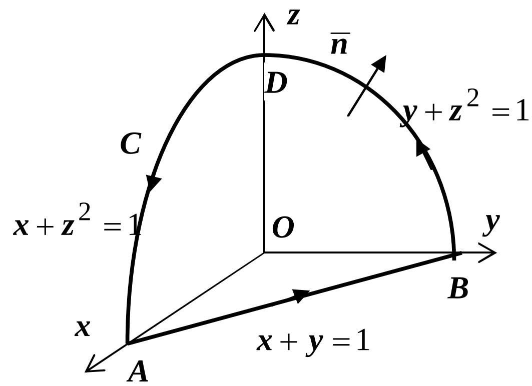
$$\oint\limits_C Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_\sigma \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta z + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma.$$

Мы примем эту формулу без доказательства.

17.4.6. Пример непосредственного вычисления циркуляции векторного поля и вычисления по формуле Стокса. Требуется вычислить циркуляцию поля $\overline{a} = y\overline{i} - \overline{j} + xz\overline{k}$ по контуру C, образующемуся в результате пересечения поверхности $x + y + z^2 = 1$ с координатными плоскостями.

Решение. Непосредственное вычисление.

$$Ц = \oint\limits_C \overline{a}\cdot d\overline{r} = \oint\limits_C ydx - dy + xzdz = \oint\limits_{\overset{\cup}{AB}} \overline{a}\cdot d\overline{r} + \oint\limits_{\overset{\cup}{BD}} \overline{a}\cdot d\overline{r} + \oint\limits_{\overset{\cup}{DA}} \overline{a}\cdot d\overline{r}.$$



1. На AB $z = dz = 0,\ y = 1 - x,\ dy = -dx$, поэтому

$$W_1 = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \overline{a}\cdot d\overline{r} = \int\limits_1^0 [(1-x) - (-1)]dx = \int\limits_1^0 (2-x)dx = -\frac{(2-x)^2}{2}\Bigg|_1^0 =$$
$= -2 + 1/2 = -3/2$.

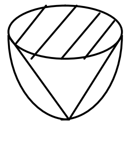
2. На BD $x = dx = 0,\ y = 1 - z^2,\ dy = -2zdz$, поэтому

$$W_2 = \int\limits_{\overset{\cup}{BD}} \overline{a}\cdot d\overline{r} = -\int\limits_1^0 dy = -y\Big|_1^0 = 1.$$

3. На DA $y = dy = 0,\ x = 1 - z^2,\ dx = -2zdz$, поэтому

$$W_3 = \int\limits_{\overset{\cup}{DA}} \overline{a}\cdot d\overline{r} = \int\limits_1^0 (1 - z^2)zdz = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_1^0 = -\frac{1}{4}.$$ Итак, $Ц = W_1 + W_2 + W_3 = -\frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}$.

Вычисление по формуле Стокса. Находим ротор поля $\overline{a}$: $\mathrm{rot}\,\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -1 & xz \end{vmatrix} = -z\overline{j} - \overline{k}$ **.** Дальше требуется определить, что мы должны взять в качестве поверхности σ (или, как часто говорят, какую поверхность натянуть на контур C). В рассматриваемом случае ответ очевиден - единственная поверхность, которая у нас есть, это цилиндрическая поверхность $x + y + z^2 = 1$, следы которой в координатных плоскостях и образуют контур C. Однако возможны случаи, когда удачный выбор поверхности существенно упрощает вычисления. Пусть, например, контур С - окружность, образованная пересечением параболоида $z = x^2 + y^2$ и конуса $z^2 = x^2 + y^2$. В качестве σ можно взять и часть параболоида, и часть конуса, опирающиеся на эту окружность, но лучше всего взять часть плоскости $z = 1$, ограниченную этой окружностью. Вернёмся к задаче. Находим



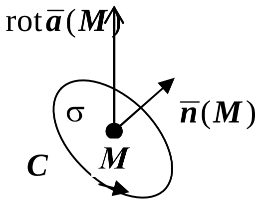
нормаль к σ: $\bar{n} = \dfrac{\bar{i} + \bar{j} + 2z\bar{k}}{\sqrt{1+1+4z^2}}$, знак взят с учётом того, что должно быть $\cos\gamma > 0$. Теперь

$\operatorname{rot}\bar{a} \cdot \bar{n} = (-\bar{z}\bar{j} - \bar{k})\dfrac{\bar{i} + \bar{j} + 2z\bar{k}}{\sqrt{2+4z^2}} = -\dfrac{3z}{\sqrt{2+4z^2}}$; спроецируем σ на Oxz: $d\sigma = \dfrac{dxdz}{|\cos\beta|} = \sqrt{2+4z^2}\,dxdz$;

$\operatorname{rot}\bar{a} \cdot \bar{n}d\sigma = -\dfrac{3z}{\sqrt{2+4z^2}} \cdot \sqrt{2+4z^2}\,dxdz = -3zdxdz$. Вычисляем $Ц = \iint\limits_{\delta} \operatorname{rot}\bar{a}\bar{n}d\delta = -3\iint\limits_{D_{xz}} zdz =$

$= -3\int\limits_0^1 zdz \int\limits_0^{1-z^2} dx = -3\int\limits_0^1 (1-z^2)zdz = -3\left(\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = -\dfrac{3}{4}$.

Самостоятельно доказать, что если $\bar{a}$ (***M***) - плоское поле, и σ лежит в плоскости ***Oxy***, то формула Стокса сводится к формуле Грина.



17.4.7. Инвариантное определение ротора. Пусть $M \in V$. Возьмём малую плоскую площадку σ, ограниченную контуром ***C***. По теореме Стокса циркуляция по ***C*** равна $Ц = \oint\limits_C \bar{a} \cdot d\bar{r} = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\bar{a} \cdot \bar{n}d\sigma$. Считая, что $\operatorname{rot}\bar{a}$ мало меняется на σ, и что поверхностный интеграл равен $\operatorname{rot}\bar{a}(M) \cdot \bar{n}(M)\sigma = |\operatorname{rot}\bar{a}(M)|\cos\varphi \cdot \sigma$, получим $Ц = |\operatorname{rot}\bar{a}(M)|\cos\varphi \cdot \sigma$. Будем теперь крутить площадку вокруг точки ***M***, при этом циркуляция меняется вместе с $\cos\varphi$. Максимальное значение циркуляция получит при $\varphi = 0$, т.е. когда направления $\operatorname{rot}\bar{a}(M)$ и $\bar{n}(M)$ совпадут. Следовательно, $\operatorname{rot}\bar{a}(M)$ указывает направление, вокруг которого циркуляция максимальна и равна $Ц_{\max} = |\operatorname{rot}\bar{a}(M)| \cdot \sigma$. Модуль ротора определяется соотношением

$|\operatorname{rot}\bar{a}(M)| = \dfrac{Ц_{\max}}{\sigma}$.

18. Специальные векторные поля.

18.1. Потенциальное векторное поле.

18.1.1. Определение потенциального поля. Векторное поле $\bar{a}$ (***M***) называется потенциальным в области ***V***, если существует такое скалярное поле $\varphi(M)$, что $\bar{a}(M) = \operatorname{grad}\varphi(M)$ для $\forall M \in V$. Поле $\varphi(M)$ называется потенциалом поля $\bar{a}$ (***M***).

18.1.2. Свойства потенциального поля.

1. Потенциал определён с точностью до произвольной постоянной ($\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{grad}(\varphi + C)$).
2. Разность потенциалов в двух точках $M_1 \in V$, $M_2 \in V$ определена однозначно.
3. Если поле $\bar{a}$ (***M***) потенциально, то линейный интеграл этого поля по любой кривой $\overset{\cup}{AB}$, целиком лежащей в ***V***, определяется только начальной и конечной точками этой кривой, и не зависит от формы кривой. $W = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \bar{a}d\bar{r} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Pdx + Qdy + Rdz =$
$= \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}dz = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} d\varphi = \varphi(P)\Big|_A^B = \varphi(B) - \varphi(A)$. Эта формула, как и в плоском случае, является обобщением формулы Ньютона-Лейбница для потенциального поля.
4. Циркуляция потенциального в области ***V*** поля по любому контуру, лежащему в ***V***, равна нулю.
5. Векторная линия потенциального поля в каждой точке ***M*** ортогональна эквипотенциальной поверхности (т.е. поверхности уровня потенциала), проходящей через точку ***M***.
6. Ротор потенциального векторного поля равен нулю:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \begin{vmatrix} \bar{\boldsymbol{i}} & \bar{\boldsymbol{j}} & \bar{\boldsymbol{k}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} & \dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{x}} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{y}} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{z}} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial \boldsymbol{y}\partial \boldsymbol{z}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial \boldsymbol{z}\partial \boldsymbol{y}}\right)\bar{\boldsymbol{i}} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial \boldsymbol{z}\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{z}}\right)\bar{\boldsymbol{j}} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial \boldsymbol{x}\partial \boldsymbol{y}} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial \boldsymbol{y}\partial \boldsymbol{x}}\right)\bar{\boldsymbol{k}} = 0\,.$$

Введём **определение безвихревого поля**: поле $\bar{\boldsymbol{a}}$ (***M***), ротор которого в каждой точке равен нулю, называется безвихревым.

Мы доказали, что потенциальное поле необходимо безвихрево. Дальше мы займёмся достаточными условиями потенциальности.

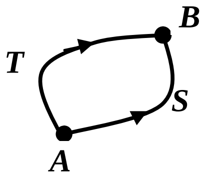
18.1.3. Достаточные условия потенциальности.

Теорема. Если область ***V*** и поле $\bar{\boldsymbol{a}}$ (***M***) удовлетворяют следующим условиям:

1. ***V*** - односвязная область;
2. Поле $\bar{\boldsymbol{a}}$ (***M***) - безвихрево (т.е. $\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = \bar{0}$),,

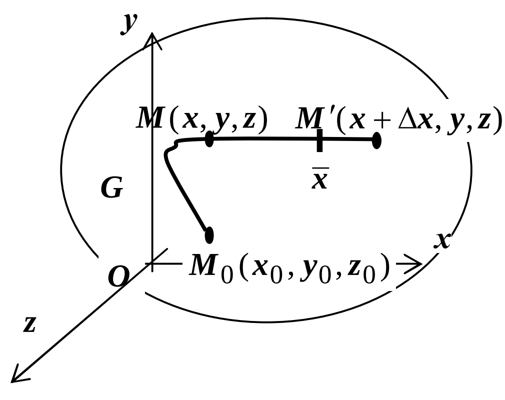
то $\bar{\boldsymbol{a}}$ (***M***) - потенциальное в ***V*** поле.

Доказательство. Напомним определение односвязной области: область (на плоскости, в пространстве) называется **односвязной**, если любой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно непрерывной деформацией стянуть в точку, не выходя при этом за пределы области. Нам при доказательстве теоремы придётся строить поверхности, натянутые на контуры; определение односвязности как раз гарантирует, что такие поверхности существуют, и ими могут служить поверхности, образующиеся при деформации контура в точку.



1. Докажем, что если выполняются условия теоремы, то линейный интеграл поля $\bar{\boldsymbol{a}}$ (***M***) по любой кривой $\overset{\cup}{\boldsymbol{AB}}$, целиком лежащей в ***V***, определяется только начальной и конечной точками этой кривой, и не зависит от её формы. Пусть ***ASB*** и ***ATB*** - два пути, соединяющие точки ***A*** и ***B***. Вместе они образуют замкнутый контур ***ASBTA***. Пусть σ - кусочно-гладкая поверхность, натянутая на этот контур. Тогда по формуле Стокса $\oint\limits_{\boldsymbol{ASBTA}} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot d\bar{\boldsymbol{r}} = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{a}}\cdot\bar{\boldsymbol{n}}\,d\sigma = 0$, так как $\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = 0$. Но $\oint\limits_{\boldsymbol{ASBTA}} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot d\bar{\boldsymbol{r}} = \oint\limits_{\boldsymbol{ASB}} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot d\bar{\boldsymbol{r}} + \oint\limits_{\boldsymbol{BTA}} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot d\bar{\boldsymbol{r}} = \oint\limits_{\boldsymbol{ASB}} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot d\bar{\boldsymbol{r}} -$
$- \oint\limits_{\boldsymbol{ATB}} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot d\bar{\boldsymbol{r}} = 0 \Rightarrow \oint\limits_{\boldsymbol{ASB}} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot d\bar{\boldsymbol{r}} = \oint\limits_{\boldsymbol{ATB}} \bar{\boldsymbol{a}}\cdot d\bar{\boldsymbol{r}}$.

2. Докажем, что если мы фиксируем точку $\boldsymbol{M}_0 \in \boldsymbol{V}$ и возьмём $\varphi(\boldsymbol{M}) = \int\limits_{\overset{\cup}{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}}} \bar{\boldsymbol{a}}\,d\bar{\boldsymbol{r}}$, то $\bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{M})$, т.е. определённая таким образом функция $\varphi(\boldsymbol{M})$ действительно является потенциалом поля $\bar{\boldsymbol{a}}$ (***M***). Это доказательство полностью повторяет доказательство теоремы пункта **16.3.3.6. Вычисление криволинейного интеграла второго рода в случае, когда выполняются условия независимости от формы пути.** Именно, требуется доказать, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{y}} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial \boldsymbol{y}} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$. Действительно, пусть $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{G}$,
$\boldsymbol{M}'(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{G}$. Тогда $\varphi(\boldsymbol{M}) = \int\limits_{\overset{\cup}{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}}} \boldsymbol{P}d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}d\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R}d\boldsymbol{z}$,



$$\varphi(\boldsymbol{M}') = \int\limits_{\overset{\cup}{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}'}} \boldsymbol{P}d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}d\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R}d\boldsymbol{z} = \int\limits_{\overset{\cup}{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}}} \boldsymbol{P}d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}d\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R}d\boldsymbol{z} +$$

$$+ \int\limits_{\overset{\cup}{\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}'}} \boldsymbol{P}d\boldsymbol{x} + \boldsymbol{Q}d\boldsymbol{y} + \boldsymbol{R}d\boldsymbol{z} \Rightarrow \varphi(\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \varphi(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) + \int\limits_{\boldsymbol{x}}^{\boldsymbol{x}+\Delta\boldsymbol{x}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})d\boldsymbol{x} \ \text{(на } \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}' \quad \boldsymbol{y} = \text{const}, \boldsymbol{z} = \text{const)}$$

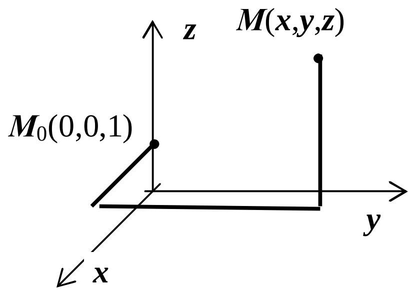
$$\Rightarrow \Delta_x\varphi(x,y,z) = \varphi(x+\Delta x,y,z) - \varphi(x,y,z) = \int_x^{x+\Delta x} P(x,y,z)dx = P(\bar{x},y,z)\cdot\Delta x \text{ (по теореме о среднем)}$$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta_x\varphi}{\Delta x} = P(\bar{x},y,z)$. Точка $\bar{x}$ удовлетворяет условиям $x < \bar{x} < x+\Delta x$. Устремим $\Delta x \to 0$, тогда $\bar{x} \to x$, и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x\varphi}{\Delta x} = \lim\limits_{\bar{x}\to x} P(\bar{x},y,z) = P(x,y,z)$.

Аналогично доказывается, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x,y,z)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = R(x,y,z)$.

18.1.4. Нахождение потенциала. В предыдущем разделе мы доказали, что если выполняются условия потенциальности поля $\bar{a}\,(M)$, то $\varphi(M) = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0M}} \bar{a}d\bar{r}$, где $M_0 \in V$ - фиксированная точка. Обычно, если в точке $O(0,0,0)$ поле не имеет особенностей, то в качестве точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ берётся именно эта точка; если в этой точке поле не определено, берётся другая точка. Интегрирование ведут по пути, состоящим из отрезков, параллельных координатным осям. В результате получим

$$\varphi(M) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz.$$



Пример. Доказать, что поле $\bar{a}(x,y,z) = \dfrac{y\cos(xy)}{z}\bar{i} + \dfrac{x\cos(xy)}{z}\bar{j} - \dfrac{\sin(xy)}{z^2}\bar{k}$ потенциально, и найти потенциал этого поля.

Решение. Мы будем доказывать, что это поле потенциально в любой односвязной области V, не содержащей точку $O(0,0,0)$. Условие безвихревости поля $\bar{a}$:

$$\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k} = 0$$ в координатной форме сводится к равенствам $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z}$, $\dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. В нашем поле $P(x,y,z) = \dfrac{y\cos(xy)}{z}$, $Q(x,y,z) = \dfrac{x\cos(xy)}{z}$, $R(x,y,z) = -\dfrac{\sin(xy)}{z^2}$. Находим производные:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{x\cos(xy)}{z^2},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{x\cos(xy)}{z^2} = \frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{y\cos(xy)}{z^2},\ \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{y\cos(xy)}{z^2} = \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\cos(xy) - xy\sin(xy)}{z},\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\cos(xy) - xy\sin(xy)}{z} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$ Потенциальность поля доказана.

Ищем потенциал. Интеграл $\varphi(M) = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0M}} \bar{a}d\bar{r}$ вычисляем по изображённому на рисунке пути, отправляясь от точки $M_0(0,0,1)$. $\varphi(x,y,z) = \int_0^x \dfrac{0\cdot\cos(x\cdot 0)}{1}dx + \int_0^y \dfrac{x\cdot\cos(xy)}{1}dy - \int_1^z \dfrac{\sin(xy)}{z^2}dz =$

$= \sin(xy)\Big|_0^y + \dfrac{\sin(xy)}{z}\Big|_1^z = \sin(xy) + \left[\dfrac{\sin(xy)}{z} - \sin(xy)\right] = \dfrac{\sin(xy)}{z}$. Если бы мы взяли в качестве точки M_0 другую точку M_1, то получили бы выражение, отличающееся на некоторую постоянную (более точно, на $C = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0M_1}} \bar{a}d\bar{r}$); поэтому $\varphi(x,y,z) = \dfrac{\sin(xy)}{z} + C$.

18.2. Соленоидальное векторное поле.

18.2.1. Определение соленоидального поля. Векторное поле $\bar{a}$ (*M*) называется соленоидальным в области *V*, если во всех точках этой области $\operatorname{div}\bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = 0$.

Согласно этому определению, поле не может иметь в области *V* источников и стоков; таким свойством обладает магнитное поле соленоида, что и объясняет происхождение термина.

Соленоидально поле ротора любого достаточно гладкого поля: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = \nabla \cdot [\nabla \times \bar{\boldsymbol{a}}] = 0$.

Самостоятельно доказать это свойство в координатной форме.

18.2.2. Свойства соленоидального поля.

1. Поток соленоидального векторного поля через поверхность σ, ограничивающую область $V_\sigma \in V$, равен нулю. Это прямое следствие формулы Остроградского.
2. Верно и обратное утверждение: равенство нулю потока через любую замкнутую поверхность σ достаточно для соленоидальности поля $\bar{a}$ (*M*). Действительно, в разделе **17.3.5. Инвариантное определение дивергенции** мы доказали, что
$$\operatorname{div}\bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = \lim_{\sigma\to M}\frac{\Pi}{V} = \lim_{\sigma\to M}\frac{\oiint\limits_{\sigma}\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{d}\sigma}{V},$$ и, так как $\oiint\limits_{\sigma}\bar{\boldsymbol{a}}\bar{\boldsymbol{n}}\,\boldsymbol{d}\sigma = 0$, то $\operatorname{div}\bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = 0$.
3. Пусть в *V* имеется изолированный источник (или сток) поля. Если поле $\bar{a}$ (*M*) соленоидально, то его поток через любую замкнутую поверхность σ, содержащую этот источник, имеет одно и то же значение.

   Фраза " в *V* имеется изолированный источник (или сток) поля" означает, что область *V*, в которой поле соленоидально, неодносвязна; из *V* выколота точка, в которой находится источник. Так, поле электрической напряжённости, создаваемое зарядом *q*, $\bar{\boldsymbol{E}} = \frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{r}^3}\bar{\boldsymbol{r}}$, соленоидально всюду, кроме точки $\boldsymbol{r} = 0$, в которой расположен источник.
4. Поток соленоидального векторного поля через любое поперечное сечение векторной трубки один и тот же. Это следует из того, что поток через боковую поверхность трубки равен нулю.

18.3. Гармонические поля.

18.3.1. Оператор Лапласа. Пусть функция $\varphi(x,y,z)$ имеет непрерывные вторые частные производные. Вычислим $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$. Оператор $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, с помощью которого по функции $\varphi(x,y,z)$ получена функция $\Delta\varphi$, называется **оператором Лапласа**, или **лапласианом**. Формально его можно получить возведением в скалярный квадрат оператора Гамильтона набла:
$$\nabla^2 = \nabla\cdot\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta.$$

Можно дать другое представление оператора Лапласа:

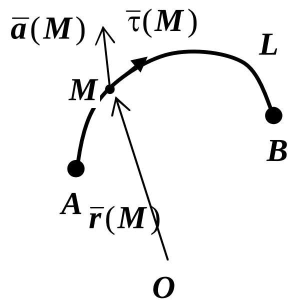
$\Delta\varphi = \nabla^2\varphi = \nabla\cdot(\nabla\varphi) = \nabla\cdot\operatorname{grad}\varphi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, и это будет уже инвариантным определением оператора.

18.3.2. Гармонические поля. Скалярное поле $\varphi(\boldsymbol{M})$ называется гармоническим, если оно удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$, или $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$. Векторное поле $\bar{a}$ (*M*) называется гармоническим, если оно является градиентом некоторой гармонической функции, т.е. $\bar{a}$ (*M*)$= \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{M})$, где $\Delta\varphi = 0$.

Из этого определения следует, что гармоническое векторное поле одновременно потенциально и соленоидально, так как $\operatorname{div}\bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{M}) = \Delta\varphi = 0$. Верно и обратное: если $\bar{a}$ (*M*) одновременно и потенциально, и соленоидально, то оно является гармоническим. Действительно, из потенциальности $\Rightarrow \exists\varphi(\boldsymbol{M}) : \bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{M})$, из соленоидальности $\Rightarrow$
$\Rightarrow \operatorname{div}\bar{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{M}) = \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{M}) = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi = 0$, т.е. $\varphi(\boldsymbol{M})$ - гармонический потенциал. Каждая координата гармонического векторного поля является гармонической функцией.

17.4. Линейный интеграл и циркуляция векторного поля.

17.4.1. Определение линейного интеграла. Пусть в пространственной области V определено непрерывное векторное поле $\overline{a}\,(M)$, L - гладкая кривая, расположенная в V. Линейным интегралом поля $\overline{a}$ вдоль линии L называется криволинейный интеграл по длине дуги от скалярного произведения $\overline{a}\,(M)$ на единичный касательный вектор $\overline{\tau}\,(M)$: $W = \int\limits_L \overline{a}(M)\cdot\overline{\tau}(M)\,ds$.



Как и поток, этот интеграл может представляться различным образом. Так, если учесть, что произведение $\overline{\tau}(M)$ на ds даёт изменение радиуса-вектора точки M, т.е. $\overline{\tau}\cdot ds = d\overline{r} = dx\overline{i} + dy\overline{j} + dz\overline{k}$,то $W = \int\limits_L \overline{a}(M)d\overline{r}$ и $W = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$. Следовательно, линейный интеграл может быть выражен и через линейный интеграл по координатам.

Физический смысл линейного интеграла: если $\overline{a}\,(M)$ - силовое поле, то W равен работе этого поля при перемещении материальной точки вдоль линии L (см. раздел **16.3**).

17.4.2. Основные свойства линейного интеграла.

17.4.2.1. Линейность. $\int\limits_L \left(C_1\overline{a}_1 + C_2\overline{a}_2\right)\overline{\tau}\,ds = C_1\int\limits_L \overline{a}_1\overline{\tau}\,ds + C_2\int\limits_L \overline{a}_2\overline{\tau}\,ds$;

17.4.2.2. Аддитивность. $\int\limits_{L_1\cup L_2} \overline{a}\cdot\overline{\tau}\,ds = \int\limits_{L_1} \overline{a}\cdot\overline{\tau}\,ds + \int\limits_{L_2} \overline{a}\cdot\overline{\tau}\,ds$. Направление на каждой из частей L_1 и L_2 должно быть таким же, как и на всей кривой $L_1 \cup L_2$;

17.4.2.3. При изменении направления вдоль L линейный интеграл меняет знак. Это следует из того, что вектор $\overline{\tau}\,(M)$ меняется на - $\overline{\tau}\,(M)$.

17.4.2.4. Если L - векторная линия поля, и движение происходит в направлении поля, то $W>0$. В этом случае вектор $\overline{\tau}\,(M)$ коллинеарен $\overline{a}\,(M)$, поэтому $\overline{a}\cdot\overline{\tau} = \text{пр}_{\overline{\tau}}\overline{a} = |\,\overline{a}\,| > 0$.

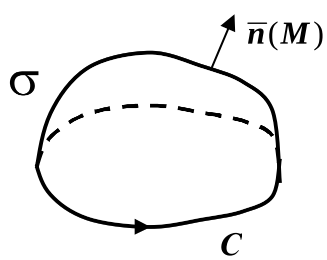
17.4.3. Вычисление линейного интеграла. Как и любой криволинейный интеграл, линейный интеграл вычисляется сведением к определённому интегралу по параметру на кривой; обычно вычисляют криволинейный интеграл $W = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$. Если кривая при параметрическом задании имеет вид $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_0 \le t \le t_k \\ z = z(t); \end{cases}$, где $x(t),\ y(t),\ z(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то $W = \int\limits_L P(x,y,z)\cdot dx + Q(x,y,z)\cdot dt + R(x,y,z)\cdot dz =$

$= \int\limits_{t_0}^{t_k} \left[P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\cdot y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\cdot z'(t)\right]dt.$ Направление интегрирования определяется направлением движения по кривой.

17.4.4. Циркуляция векторного поля. Циркуляцией называется линейный интеграл векторного поля по замкнутой кривой C: $Ц = \oint\limits_C \overline{a}\cdot d\overline{r}$.

Обычно говорят, что циркуляция характеризует вращательную способность поля. Имеется в виду следующее. Если векторные линии поля замкнуты, то, как мы видели, циркуляция по ним в направлении поля положительна, при этом в гидродинамической интерпретации частицы жидкости крутятся по этим замкнутым линиям. Пусть теперь линии тока произвольны; вообразим в объёме V замкнутый контур C. Если в результате движения жидкости этот контур будет вращаться, то поле обладает вращательной способностью; абсолютная величина циркуляции будет определять угловую скорость вращения (чем больше $|Ц|$, тем выше скорость); знак циркуляции покажет, совпадает ли направление вращения с направлением интегрирования.

17.4.5. Теорема Стокса. Пусть в пространственной области V задано гладкое векторное поле $\overline{a}\,(M)$ и σ - незамкнутая кусочно-гладкая поверхность, ограниченная контуром C. Единичный вектор нормали $\overline{n}(M)$ выбирается так, что с его конца



направление обхода $\boldsymbol{C}$ видно совершающимся против часовой стрелки. Тогда циркуляция поля $\bar{\boldsymbol{a}}$ по контуру $\boldsymbol{C}$ равна потоку ротора этого поля через поверхность σ: $\oint\limits_{C} \bar{\boldsymbol{a}} \cdot d\bar{\boldsymbol{r}} = \iint\limits_{\sigma} \operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{a}} \cdot \bar{\boldsymbol{n}} d\sigma$.

Приведённую формулу называют формулой Стокса в векторной форме. В координатной форме формула Стокса имеет вид

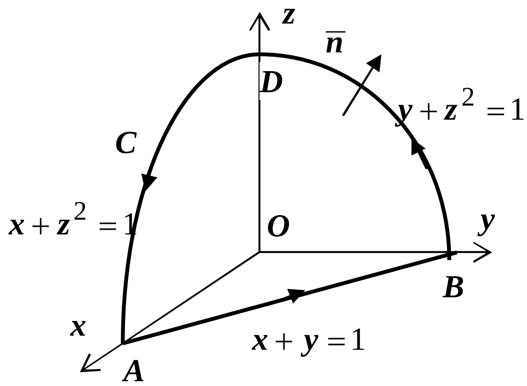
$$\oint\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \text{ или}$$

$$\oint\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{\sigma} \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta z + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right] d\sigma .$$

Мы примем эту формулу без доказательства.

17.4.6. Пример непосредственного вычисления циркуляции векторного поля и вычисления по формуле Стокса. Требуется вычислить циркуляцию поля $\bar{a} = y\bar{i} - \bar{j} + xz\bar{k}$ по контуру $\boldsymbol{C}$, образующемуся в результате пересечения поверхности $x + y + z^2 = 1$ с координатными плоскостями.

Решение. Непосредственное вычисление.



$$Ц = \oint\limits_{C} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \oint\limits_{C} ydx - dy + xzdz = \oint\limits_{\overset{\cup}{AB}} \bar{a} \cdot d\bar{r} + \oint\limits_{\overset{\cup}{BD}} \bar{a} \cdot d\bar{r} + \oint\limits_{\overset{\cup}{DA}} \bar{a} \cdot d\bar{r} .$$

4. На AB $z = dz = 0,\ y = 1 - x,\ dy = -dx$, поэтому

$$W_1 = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int\limits_1^0 [(1-x) - (-1)] dx = \int\limits_1^0 (2-x) dx = -\frac{(2-x)^2}{2} \Bigg|_1^0 =$$

$= -2 + 1/2 = -3/2$.

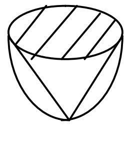
5. На BD $x = dx = 0,\ y = 1 - z^2,\ dy = -2zdz$, поэтому

$$W_2 = \int\limits_{\overset{\cup}{BD}} \bar{a} \cdot d\bar{r} = -\int\limits_1^0 dy = -y \Big|_1^0 = 1.$$

6. На DA $y = dy = 0,\ x = 1 - z^2,\ dx = -2zdz$, поэтому

$$W_3 = \int\limits_{\overset{\cup}{DA}} \bar{a} \cdot d\bar{r} = \int\limits_1^0 (1 - z^2) z dz = \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^4}{4} \right) \Bigg|_1^0 = -\frac{1}{4}. \text{ Итак, } Ц = W_1 + W_2 + W_3 = -\frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{4} = -\frac{3}{4}.$$

Вычисление по формуле Стокса. Находим ротор поля $\bar{a}$: $\operatorname{rot} \bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -1 & xz \end{vmatrix} = -z\bar{j} - \bar{k}$. Дальше требуется определить, что мы должны взять в качестве поверхности σ (или, как часто говорят, какую поверхность натянуть на контур $\boldsymbol{C}$). В рассматриваемом случае ответ очевиден - единственная поверхность, которая у нас есть, это цилиндрическая поверхность $x + y + z^2 = 1$, следы которой в координатных плоскостях и образуют контур $\boldsymbol{C}$. Однако возможны случаи, когда удачный выбор поверхности существенно упрощает вычисления. Пусть, например, контур С - окружность, образованная пересечением параболоида $z = x^2 + y^2$ и конуса $z^2 = x^2 + y^2$. В качестве σ можно взять и часть параболоида, и часть конуса, опирающиеся на эту окружность, но лучше всего взять часть плоскости $z = 1$, ограниченную этой окружностью. Вернёмся к задаче. Находим



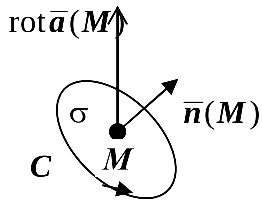
нормаль к σ: $\bar{n} = \dfrac{\bar{i} + \bar{j} + 2z\bar{k}}{\sqrt{1 + 1 + 4z^2}}$, знак взят с учётом того, что должно быть $\cos\gamma > 0$. Теперь

$\text{rot}\,\bar{a}\cdot\bar{n}=(-\bar{z}\bar{j}-\bar{k})\dfrac{\bar{i}+\bar{j}+2z\bar{k}}{\sqrt{2+4z^2}}=-\dfrac{3z}{\sqrt{2+4z^2}}$; спроецируем σ на Oxz: $d\sigma=\dfrac{dxdz}{|\cos\beta|}=\sqrt{2+4z^2}\,dxdz$;

$\text{rot}\,\bar{a}\cdot\bar{n}d\sigma=-\dfrac{3z}{\sqrt{2+4z^2}}\cdot\sqrt{2+4z^2}\,dxdz=-3zdxdz$. Вычисляем $Ц=\iint\limits_{\delta}\text{rot}\,\bar{a}\bar{n}d\delta=-3\iint\limits_{D_{xz}}zdz=$

$$=-3\int_0^1 zdz\int_0^{1-z^2}dx=-3\int_0^1(1-z^2)zdz=-3\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=-\frac{3}{4}.$$

Самостоятельно доказать, что если $\bar{a}\,(M)$ - плоское поле, и σ лежит в плоскости Oxy, то формула Стокса сводится к формуле Грина.



17.4.7. Инвариантное определение ротора. Пусть $M\in V$. Возьмём малую плоскую площадку σ, ограниченную контуром C. По теореме Стокса циркуляция по C равна $Ц=\oint\limits_{C}\bar{a}\cdot d\bar{r}=\iint\limits_{\sigma}\text{rot}\,\bar{a}\cdot\bar{n}d\sigma$. Считая, что $\text{rot}\,\bar{a}$ мало меняется на σ, и что поверхностный интеграл равен $\text{rot}\,\bar{a}(M)\cdot\bar{n}(M)\sigma=|\text{rot}\,\bar{a}(M)|\cos\varphi\cdot\sigma$, получим $Ц=|\text{rot}\,\bar{a}(M)|\cos\varphi\cdot\sigma$. Будем теперь крутить площадку вокруг точки M, при этом циркуляция меняется вместе с $\cos\varphi$. Максимальное значение циркуляция получит при $\varphi=0$, т.е. когда направления $\text{rot}\,\bar{a}(M)$ и $\bar{n}(M)$ совпадут. Следовательно, $\text{rot}\,\bar{a}(M)$ указывает направление, вокруг которого циркуляция максимальна и равна $Ц_{\max}=|\text{rot}\,\bar{a}(M)|\cdot\sigma$. Модуль ротора определяется соотношением $|\text{rot}\,\bar{a}(M)|=\dfrac{Ц_{\max}}{\sigma}$.

18. Специальные векторные поля.

18.1. Потенциальное векторное поле.

18.1.1. Определение потенциального поля. Векторное поле $\bar{a}\,(M)$ называется потенциальным в области V, если существует такое скалярное поле $\varphi(M)$, что $\bar{a}\,(M)=\text{grad}\,\varphi(M)$ для $\forall M\in V$. Поле $\varphi(M)$ называется потенциалом поля $\bar{a}\,(M)$.

18.1.2. Свойства потенциального поля.

1. Потенциал определён с точностью до произвольной постоянной ($\text{grad}\,\varphi=\text{grad}(\varphi+C)$).
2. Разность потенциалов в двух точках $M_1\in V$, $M_2\in V$ определена однозначно.
3. Если поле $\bar{a}\,(M)$ потенциально, то линейный интеграл этого поля по любой кривой $\overset{\cup}{AB}$, целиком лежащей в V, определяется только начальной и конечной точками этой кривой, и не зависит от формы кривой. $W=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}\bar{a}d\bar{r}=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}Pdx+Qdy+Rdz=$
$=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}dz=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}d\varphi=\varphi(P)\Big|_A^B=\varphi(B)-\varphi(A)$. Эта формула, как и в плоском случае, является обобщением формулы Ньютона-Лейбница для потенциального поля.
4. Циркуляция потенциального в области V поля по любому контуру, лежащему в V, равна нулю.
5. Векторная линия потенциального поля в каждой точке M ортогональна эквипотенциальной поверхности (т.е. поверхности уровня потенциала), проходящей через точку M.
6. Ротор потенциального векторного поля равен нулю:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y}\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}\right)\bar{j}+\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}\right)\bar{k}=0.$$

Введём **определение безвихревого поля**: поле $\bar{a}$ (M), ротор которого в каждой точке равен нулю, называется безвихревым.

Мы доказали, что потенциальное поле необходимо безвихрево. Дальше мы займёмся достаточными условиями потенциальности.

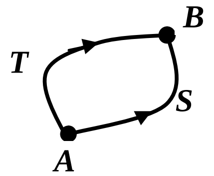
18.1.3. Достаточные условия потенциальности.

Теорема. Если область V и поле $\bar{a}$ (M) удовлетворяют следующим условиям:

3. V - односвязная область;
4. Поле $\bar{a}$ (M) - безвихрево (т.е. $\operatorname{rot}\bar{a}(M)=\bar{0}$),,

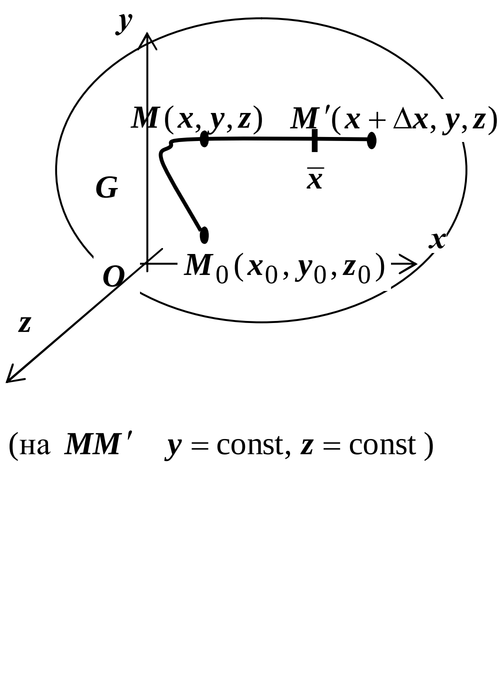
то $\bar{a}$ (M) - потенциальное в V поле.

Доказательство. Напомним определение односвязной области: область (на плоскости, в пространстве) называется **односвязной**, если любой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно непрерывной деформацией стянуть в точку, не выходя при этом за пределы области. Нам при доказательстве теоремы придётся строить поверхности, натянутые на контуры; определение односвязности как раз гарантирует, что такие поверхности существуют, и ими могут служить поверхности, образующиеся при деформации контура в точку.



2. Докажем, что если выполняются условия теоремы, то линейный интеграл поля $\bar{a}$ (M) по любой кривой $\overset{\cup}{AB}$, целиком лежащей в V, определяется только начальной и конечной точками этой кривой, и не зависит от её формы. Пусть ASB и ATB - два пути, соединяющие точки A и B. Вместе они образуют замкнутый контур $ASBTA$. Пусть σ - кусочно-гладкая поверхность, натянутая на этот контур. Тогда по формуле Стокса $\oint\limits_{ASBTA}\bar{a}\cdot d\bar{r}=\iint\limits_{\sigma}\operatorname{rot}\bar{a}\cdot\bar{n}d\sigma=0$, так как $\operatorname{rot}\bar{a}(M)=0$. Но $\oint\limits_{ASBTA}\bar{a}\cdot d\bar{r}=\oint\limits_{ASB}\bar{a}\cdot d\bar{r}+\oint\limits_{BTA}\bar{a}\cdot d\bar{r}=\oint\limits_{ASB}\bar{a}\cdot d\bar{r}-$ $-\oint\limits_{ATB}\bar{a}\cdot d\bar{r}=0\Rightarrow\oint\limits_{ASB}\bar{a}\cdot d\bar{r}=\oint\limits_{ATB}\bar{a}\cdot d\bar{r}$.

2. Докажем, что если мы фиксируем точку $M_0\in V$ и возьмём $\varphi(M)=\int\limits_{\overset{\cup}{M_0M}}\bar{a}d\bar{r}$, то $\bar{a}(M)=\operatorname{grad}\varphi(M)$, т.е. определённая таким образом функция $\varphi(M)$ действительно является потенциалом поля $\bar{a}$ (M). Это доказательство полностью повторяет доказательство теоремы пункта **16.3.3.6. Вычисление криволинейного интеграла второго рода в случае, когда выполняются условия независимости от формы пути.** Именно, требуется доказать, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=P(x,y,z),\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=Q(x,y,z),\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=R(x,y,z)$. Действительно, пусть $M(x,y,z)\in G$, $M'(x+\Delta x,y,z)\in G$. Тогда $\varphi(M)=\int\limits_{\overset{\cup}{M_0M}}Pdx+Qdy+Rdz$,



$$\varphi(M')=\int\limits_{\overset{\cup}{M_0MM'}}Pdx+Qdy+Rdz=\int\limits_{\overset{\cup}{M_0M}}Pdx+Qdy+Rdz+$$

$$+\int\limits_{\overset{\cup}{MM'}}Pdx+Qdy+Rdz\Rightarrow\varphi(x+\Delta x,y,z)=\varphi(x,y,z)+\int\limits_{x}^{x+\Delta x}P(x,y,z)dx\ (\text{на } MM'\quad y=\text{const}, z=\text{const})$$

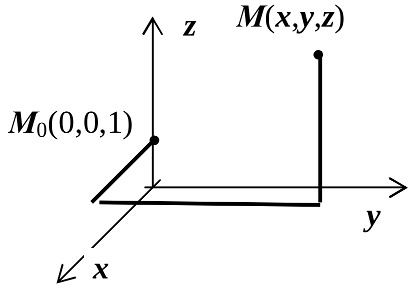
$$\Rightarrow \Delta_x \varphi(x,y,z) = \varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x,y,z) = \int\limits_x^{x+\Delta x} P(x,y,z)dx = P(\bar{x},y,z)\cdot\Delta x \text{ (по теореме о среднем)}$$

$\Rightarrow \dfrac{\Delta_x\varphi}{\Delta x} = P(\bar{x},y,z)$. Точка $\bar{x}$ удовлетворяет условиям $x < \bar{x} < x+\Delta x$. Устремим $\Delta x \to 0$, тогда $\bar{x} \to x$, и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x\varphi}{\Delta x} = \lim\limits_{\bar{x}\to x} P(\bar{x},y,z) = P(x,y,z)$.

Аналогично доказывается, что $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = Q(x,y,z),\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = R(x,y,z)$.

18.1.4. Нахождение потенциала. В предыдущем разделе мы доказали, что если выполняются условия потенциальности поля $\bar{a}\,(M)$, то $\varphi(M) = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0M}} \bar{a}d\bar{r}$, где $M_0 \in V$ - фиксированная точка. Обычно, если в точке $O(0,0,0)$ поле не имеет особенностей, то в качестве точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ берётся именно эта точка; если в этой точке поле не определено, берётся другая точка. Интегрирование ведут по пути, состоящим из отрезков, параллельных координатным осям. В результате получим

$$\varphi(M) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz.$$



Пример. Доказать, что поле $\bar{a}(x,y,z) = \dfrac{y\cos(xy)}{z}\bar{i} + \dfrac{x\cos(xy)}{z}\bar{j} - \dfrac{\sin(xy)}{z^2}\bar{k}$ потенциально, и найти потенциал этого поля.

Решение. Мы будем доказывать, что это поле потенциально в любой односвязной области V, не содержащей точку $O(0,0,0)$. Условие безвихревости поля $\bar{a}$:

$$\operatorname{rot}\bar{a}(M) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\bar{k} = 0$$ в координатной форме сводится

к равенствам $\dfrac{\partial R}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial z},\ \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x},\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$. В нашем поле $P(x,y,z) = \dfrac{y\cos(xy)}{z}$, $Q(x,y,z) = \dfrac{x\cos(xy)}{z}$, $R(x,y,z) = -\dfrac{\sin(xy)}{z^2}$. Находим производные:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = -\frac{x\cos(xy)}{z^2},\ \frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{x\cos(xy)}{z^2} = \frac{\partial R}{\partial y};\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{y\cos(xy)}{z^2},\ \frac{\partial R}{\partial x} = -\frac{y\cos(xy)}{z^2} = \frac{\partial P}{\partial z};$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\cos(xy) - xy\sin(xy)}{z},\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\cos(xy) - xy\sin(xy)}{z} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$ Потенциальность поля доказана.

Ищем потенциал. Интеграл $\varphi(M) = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0M}} \bar{a}d\bar{r}$ вычисляем по изображённому на рисунке пути, отправляясь от точки $M_0(0,0,1)$. $\varphi(x,y,z) = \int\limits_0^x \dfrac{0\cdot\cos(x\cdot 0)}{1}dx + \int\limits_0^y \dfrac{x\cdot\cos(xy)}{1}dy - \int\limits_1^z \dfrac{\sin(xy)}{z^2}dz =$

$= \sin(xy)\Big|_0^y + \dfrac{\sin(xy)}{z}\Big|_1^z = \sin(xy) + \left[\dfrac{\sin(xy)}{z} - \sin(xy)\right] = \dfrac{\sin(xy)}{z}$. Если бы мы взяли в качестве точки M_0 другую точку M_1, то получили бы выражение, отличающееся на некоторую постоянную (более точно, на $C = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0M_1}} \bar{a}d\bar{r}$); поэтому $\varphi(x,y,z) = \dfrac{\sin(xy)}{z} + C$.

18.2. Соленоидальное векторное поле.

18.2.1. Определение соленоидального поля. Векторное поле $\bar{a}\,(M)$ называется соленоидальным в области V, если во всех точках этой области $\operatorname{div}\bar{a}(M)=0$.

Согласно этому определению, поле не может иметь в области V источников и стоков; таким свойством обладает магнитное поле соленоида, что и объясняет происхождение термина.

Соленоидально поле ротора любого достаточно гладкого поля: $\operatorname{div}\operatorname{rot}\bar{a}(M)=\nabla\cdot[\nabla\times\bar{a}]=0$. **Самостоятельно доказать это свойство в координатной форме**.

18.2.2. Свойства соленоидального поля.

5. Поток соленоидального векторного поля через поверхность σ, ограничивающую область $V_\sigma\in V$, равен нулю. Это прямое следствие формулы Остроградского.
6. Верно и обратное утверждение: равенство нулю потока через любую замкнутую поверхность σ достаточно для соленоидальности поля $\bar{a}\,(M)$. Действительно, в разделе **17.3.5. Инвариантное определение дивергенции** мы доказали, что
$$\operatorname{div}\bar{a}(M)=\lim_{\sigma\to M}\frac{\Pi}{V}=\lim_{\sigma\to M}\frac{\oiint\limits_{\sigma}\bar{a}\bar{n}d\sigma}{V},$$ и, так как $\oiint\limits_{\sigma}\bar{a}\bar{n}d\sigma=0$, то $\operatorname{div}\bar{a}(M)=0$.
7. Пусть в V имеется изолированный источник (или сток) поля. Если поле $\bar{a}\,(M)$ соленоидально, то его поток через любую замкнутую поверхность σ, содержащую этот источник, имеет одно и то же значение.

   Фраза " в V имеется изолированный источник (или сток) поля" означает, что область V, в которой поле соленоидально, неодносвязна; из V выколота точка, в которой находится источник. Так, поле электрической напряжённости, создаваемое зарядом q, $\bar{E}=\dfrac{q}{r^3}\bar{r}$, соленоидально всюду, кроме точки $r=0$, в которой расположен источник.
8. Поток соленоидального векторного поля через любое поперечное сечение векторной трубки один и тот же. Это следует из того, что поток через боковую поверхность трубки равен нулю.

18.3. Гармонические поля.

18.3.1. Оператор Лапласа. Пусть функция $\varphi(x,y,z)$ имеет непрерывные вторые частные производные. Вычислим $\Delta\varphi=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$. Оператор $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$, с помощью которого по функции $\varphi(x,y,z)$ получена функция $\Delta\varphi$, называется **оператором Лапласа**, или **лапласианом**. Формально его можно получить возведением в скалярный квадрат оператора Гамильтона набла:
$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\bar{i}+\frac{\partial}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial}{\partial z}\bar{k}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta.$$

Можно дать другое представление оператора Лапласа:
$\Delta\varphi=\nabla^2\varphi=\nabla\cdot(\nabla\varphi)=\nabla\cdot\operatorname{grad}\varphi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, и это будет уже инвариантным определением оператора.

18.3.2. Гармонические поля. Скалярное поле $\varphi(M)$ называется гармоническим, если оно удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$, или $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$. Векторное поле $\bar{a}\,(M)$ называется гармоническим, если оно является градиентом некоторой гармонической функции, т.е. $\bar{a}\,(M)=\operatorname{grad}\varphi(M)$, где $\Delta\varphi=0$.

Из этого определения следует, что гармоническое векторное поле одновременно потенциально и соленоидально, так как $\operatorname{div}\bar{a}(M)=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(M)=\Delta\varphi=0$. Верно и обратное: если $\bar{a}\,(M)$ одновременно и потенциально, и соленоидально, то оно является гармоническим. Действительно, из потенциальности $\Rightarrow\exists\varphi(M):\bar{a}(M)=\operatorname{grad}\varphi(M)$, из соленоидальности $\Rightarrow$
$\Rightarrow\operatorname{div}\bar{a}(M)=\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(M)=0\Leftrightarrow\Delta\varphi=0$, т.е. $\varphi(M)$ - гармонический потенциал. Каждая координата гармонического векторного поля является гармонической функцией.